Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
3^{er} Examen Parcial (50 %)
Abr-Jul 2008
Tipo C

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (14 pts.) Sea A una región simplemente conexa que **no contiene** al punto $1+2i$, y sea $u(x,y) = \log[(x-1)^2 + (y-2)^2]$.
   (a) Hallar una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en A.
   (b) Expresar $u + iv$ como una función $f(z)$, es decir, en términos de funciones complejas.

2. (10 pts.) Desarrollar $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ en serie de Laurent-Tylor en el anillo $1 < |z| < 2$.

3. (12 pts.) dada $f(z) = 1 + 2i + e^z$ y A el rectángulo de vértices

$$\log 2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \log 4 \ , \ -i\pi/2 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 3i\pi/2$$

   describir geométricamente $f(A)$, y dibujar tanto A como $f(A)$. Además, ¿es posible dar el valor de $\int_{\partial A} f(z)dz$ sin hacer ningún cálculo?. En caso afirmativo, dé justificadamente el valor de dicha integral.

4. (14 pts.) Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$, y sea $f(z) = \dfrac{e^{az}}{\cosh z}$.
   (a) Calcular el residuo de $f(z)$ en el punto $z = i\pi/2$
   (b) Usar $f(z)$ y el rectángulo de vértices $\pm R$ y $\pm R + i\pi$ (con $R > 0$) para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cos(a\pi/2)}$$